Colle du 11 décembre : Réduction

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

11.1 Cours

Question de cours 1 : Définition d'un espace vectoriel.

Question de cours 2 : Liens entre diagonalisabilité/trigonalisabilité et polynôme caractéristique/minimal.

Question de cours 3 : Lemme des noyaux.

11.2 Réduction

Exercice 1 : Selon que $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, dire si l'affirmation suivante est vraie :

$$(\exists A \in \mathcal{M}_n(K), A^2 + 2A + 5 = 0) \Leftrightarrow 2|n$$

Exercice 2 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et ayant n valeurs propres deux à deux distinctes de module inférieur ou égal à 1. Montrer que ce sont des racines de l'unité.

Exercice 3 : Soit $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 4 : Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_2(K)$. Montrer qu'il existe un triplet $(a, b, c) \in K^3 - \{0\}$ tel que $aA + bB + cC$ admet une valeur propre double.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t'il $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^m = I_n$, alors $M^r = I_n$?

Exercice 6 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)^2 = A$. On pourra commencer par supposer que la seule valeur propre de A est 1.

Exercice 7 : Soit B l'espace des suites bornées de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Notons $T : B \to B$ l'endomorphisme qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Déterminer tous les sous-espaces de dimension finie de B stables par T.

Exercice 8 : Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A nilpotente et $B = AP(A)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $P(0) = 1$.
1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(B)$.
2. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 9 : Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si p est un nombre premier impair, la réduction modulo p de $GL_n(\mathbb{Z})$ dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ restreinte à G est injective. En déduire qu'à isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$.